دریافت مقاله: ۹۴/۰۲/۲۲
پذیرش نهایی: ۹۴/۰۶/۱۱
http://jorie.srttu.edu

نشریه علمی
پژوهش در آموزش
جلد ۱، شماره ۴، تابستان ۱۳۹۴ صص ۴۱ تا ۵۹

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

# شناسایی بدفهمی‌ها، راهبردها و استدلال‌های دانش‌آموزان پایه ششم در حل مسائل کسر

ملیحه دوستی[۱] و ابراهیم ریحانی[۲]

**چکیـــده:** هدف پژوهش حاضر، شناسایی بدفهمی‌ها، راهبردها و استدلال‌های دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی در حل مسائل کسر است. روش پژوهش، توصیفی- پیمایشی است. نمونه مورد مطالعه، ۷۱ نفر از دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی شهرستان ساوه هستند که به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. ابزار اندازه‌گیری، آزمونی در ارتباط با مفهوم کسرها است. در تجزیه و تحلیل داده‌ها، از روش‌های آمار توصیفی و آمار استنباطی استفاده شده است. نتایج پژوهش حاکی از آن است که درک دانش‌آموزان، بیشتر مبتنی بر درک کسر به‌عنوان جزءای از کل است. آنها مفهوم کسر را به‌درستی درک نکرده‌اند و با بدفهمی‌های مختلفی نظیرِ بازنمایی کسر به‌عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل، عدم توجه به برابری قسمت‌های افراز شده، در نظر گرفتن کسر بازنمایی کننده جزءای از کل به‌عنوان مقدار و شمارش علائم افراز مواجه هستند. اکثر آنان، تمایلی به ارائه راهبرد و توجیه درستی پاسخ خود ندارند و این کار را بسی سخت و مشکل می‌پندارند. برخی از دانش‌آموزان با توجه به نوع مسئله، استدلال یا راهبردهای مختلفی را ارائه کردند. استدلال‌های دانش‌آموزان، در سه شکل نمادین، تجربی و روایت‌گونه دسته‌بندی شدند. همچنین، در این پژوهش، راهبرد تناسب، افرازکردن، جبری و رسم شکل نیز از راهبردهای استفاده شده توسط دانش‌آموزان در حل مسائل کسر هستند.

**واژگان کلیدی:** مفهوم کسر، بدفهمی، استدلال، راهبردهای حل‌مسئله و آموزش ریاضی.

# Identifying Misconceptions, Strategies and Reasoning of Sixth Grade Students in Problems Solving of Fraction

**Malihe Doosti[1] , Ebrahim Reyhani[2]**

**Abstract**: The Purpose of this study was to identify misconceptions, strategies and reasoning of the sixth grade students in solving problems of fraction. The research method was descriptive-survey. The 71 sixth grade students in Saveh city were selected by using random cluster sampling method. The data collecting tool was a test related to the fraction concepts. Descriptive and inferential statisticswere used for analyzing the data. The results showed that the students' understanding of fraction was based on the sub-construct of part-whole. They don't have a clear comprehension of fraction and representation of the fraction part of part rather than part of whole. Lack of attention to the equality of the partition and identification of a part of whole representation of fractions as the amount and counting the symptoms of the partition are among the others. The majority of them are reluctant to offer their response strategies and their proper justification and they consider it difficult to realize. Some of the students present different reasoning and strategies based on the type of the problems. The reasoning of students was classified into symbolic, empirical and narrative. Also, the students use proportion, partitioning, algebraic and drawing shape strategies to solve fraction problems.

**Keywords:** Concept of fraction, Misconception, Reasoning, Strategies of Problem Solving and Mathematics Education.

[۱]- دانشجوی کارشناس ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، doosti.m23@gmail.com
[۲]- **دانشیار** گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، e_reyhani@yahoo.com

## ۱- مقدمه

کسرها برای درک و توسعه مفاهیم گوناگون مانند اعداد اعشاری، اعدادگویا، نسبت، نرخ، درصد و احتمال در دوره ابتدایی ضروری هستند و پس از آن تا آخرین سال‌های دبیرستان به‌صورت‌های گوناگون، در معادلات و نامعادلات کسری، عبارت‌های جبری شامل کسر، شیب خط، توابع کسری و غیره به‌کار می‌روند. مشکلات دانش‌آموزان در کسرها در دوره ابتدایی، مانعی برای موفّقیّت آنان در سال‌های بعد است. از جمله، ناتوانی دانش‌آموزان در انجام چهار عمل اصلی با کسرها، به بروز خطا در حل تمرین‌ها و مسائل جبری منجر می‌شود. وو[1] این ایده را این‌گونه بیان می‌کند: "موضوع این نیست که چه اندازه تفکر جبری در پایه‌های اولیه معرفی شود و چگونه می‌تواند سودمند باشد، موضوع آن است که اگر یاددهی کسرها و اعداد اعشاری به‌طور بنیادین و ریشه‌ای اصلاح نگردد، عدم موفقیت در جبر ادامه پیدا خواهد کرد"[۱]. بِهر، لش، پُست و سیلور[2] و بِهر و پُست مشکلات دانش‌آموزان در جبر را به درک نادرست مفاهیم اولیه کسر نسبت داده‌اند[۳و۲].تحقیقات مختلفی دلایل عدم یادگیری صحیح کسرها توسط دانش‌آموزان را منعکس کرده‌اند. غالب‌شدن زمینه‌های محدود[3] در معرفی اولیه‌ی[4] کسرها (مانند مدل‌های پیوسته، کسرهای معرف نصف و واحد[5])، مداخله طرحواره‌های اعداد صحیح (مانند در نظر گرفتن یک کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل) و بی‌تأثیر بودن روش‌های یاددهی کنونی[۵و۴]. همچنین انواعِ جدیدِ واحدها، شیوه نمادگذاری جدید، معانی جدید از عملیات و مداخله معنایی با اعداد صحیح[۶] از جمله دلایل مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری کسرها است. لونتا و مک کوئین[6] احتمال می‌دهند که عملکرد ضعیف در ریاضیات با خطاها و بدفهمی‌های[7] دانش‌آموزان مرتبط است[۷]. برخورد سطحی معلمان با این ابهام‌ها و پنداشت‌های غلط ذهنی و عدم کنکاش برای جستجوی ریشه‌های این نادرستی‌ها و عدم تصحیح آنها، می‌تواند به شدت برای یادگیری معنادار مفاهیم ریاضی زیان‌آور باشد[۸].در حوزه آموزش ریاضی، برقراری توازن بین درک مفهومی و رویه‌ای و حصول یادگیری معنادار از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM[8]) در کتاب اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌کند که تسلط بر رویه‌ها[9] و درک مفهومی در ریاضیات از طریق حل‌مسئله و استدلال و توجیه[10] توسعه می‌یابد[۹]. از دیدگاه گانیه حل‌مسئله تنها به‌کارگیری قاعده‌ها، تکنیک‌ها، مهارت‌ها و مفاهیم یاد گرفته شدهٔ قبلی دانش و تجربهٔ فرد در یک موقعیت جدید نیست؛ بلکه فرآیندی است که موجب یادگیری جدید نیز می‌شود[۸]. علم‌الهدایی نیز معتقد است آنچه که دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف آموزشی، یادگیری و حل‌مسئله از خود بروز می‌دهند مبتنی بر تصویرهای ذهنی و فعل و انفعال‌های عقلانی آنان است[۸]. از طرفی دیگر، بال و باس در تحقیقات خود به اهمیت استدلال و اثبات[11] در ریاضیات مدرسه‌ای اشاره می‌نمایند. آنها نشان می‌دهند که درک و فهم ریاضی بدون تأکید بر استدلال غیر ممکن است و جنبه ابزاری و رویه‌ای پیدا می‌کند. علاوه بر این، آنها به این نتیجه دست می‌یابند که چنانچه ریاضیات به جای مجموعه‌ای از رویه‌ها، به عنوان یک علم مستدل یاد گرفته شود، به‌راحتی می‌تواند بازسازی شود، حتی موقعی که حافظه رویه‌ها را فراموش می‌کند[۱۰]. کیل پاتریک و سوافورد[12] بیان می‌کنند که "یکی از بهترین روش‌ها برای تقویت توانایی استدلالی دانش‌آموزان این است که راه‌حل‌های خود را برای دیگران شرح دهند یا توجیه کنند. به‌عقیده‌ی آن‌ها در فرآیند بیان اندیشه‌ها و ایجاد ارتباط فکری، مهارت استدلال کردن دانش‌آموزان پرورش می‌یابد"[۱۱]. از آن‌جا که اثبات رسمی در دوره ابتدایی جایی ندارد، توجیه پاسخ‌های دانش‌آموزان توسط خودشان می‌تواند جایگزین اثبات رسمی در سطوح بالاتر آموزشی گردد. بنابراین، ارائه توجیه می‌تواند درک دانش‌آموزان از کسرها، دانش و بدفهمی‌های‌شان را نشان دهد[۱۲]. سؤالاتی که پژوهش حاضر را هدایت می‌کنند از این قرار هستند:

۱) درک دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی از کسرها چگونه است و چه بدفهمی‌هایی دارند؟

۲) دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی در پاسخ به سؤالات کسر چگونه استدلال می‌کنند و چه راهبردهایی[13] را برمی‌گزینند؟

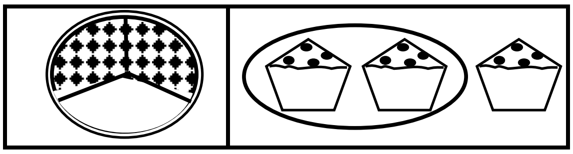
## ۲- مبانی نظری پژوهش

### ۱-۲- درک مفهوم کسر

پژوهشگران توافق دارند که یکی از عوامل عمده‌ی مؤثر در پیچیدگی‌های یاددهی و یادگیری کسرها به این حقیقت منوط است که درک کسر به درک پنج زیرساختار [۱۴](جزء به کل، نسبت، خارج قسمت، عملگر و اندازه[۱۵]) وابسته است[۲،۱۳،۶]. کی‌یِرن[۱۶] اولین شخصی بود که موضوع چند لایه‌ای بودن کسرها را مطرح کرد و درک مفهوم کسر را با درک زیر ساختارها مرتبط دانست[۱۳]. از این رو شرح مختصری از این زیرساختارها در ادامه ارائه شده است.

#### ۱-۱-۲-زیرساختار جزء به کل

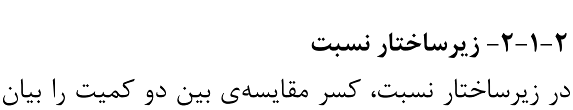
با افراز[۱۷] یک کمیت گسسته یا پیوسته به قسمت‌های هم‌اندازه و در نظر گرفتن قسمت‌هایی از آن، کسر به‌عنوان جزءای از کل حاصل می‌شود[۲و ۶]، که به فرم $\frac{a}{b}$ نوشته می‌شود [۲]. در زیرساختار جزء به کل، کسر $\frac{۲}{۳}$، به‌عنوان ۲ تکه کلوچه از یک کلوچه که به سه قسمت مساوی تقسیم شده است یا به‌عنوان ۲ عدد کیک کشمشی از ۳ عدد کیک کشمشی در نظر گرفته می‌شود (شکل۱).



**شکل۱: نمایش کسر $\frac{۲}{۳}$ در زیرساختار جزء به کل**

#### ۲-۱-۲- زیرساختار نسبت

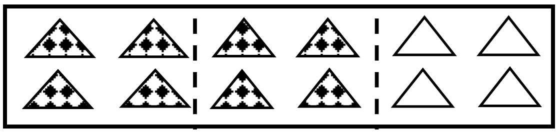
در زیرساختار نسبت، کسر مقایسه‌ی بین دو کمیت را بیان می‌کند و به‌عنوان یک شاخص مقایسه‌ای در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، کسر در این زیرساختار، عدد نیست [۲و۱۴]. برای مثال، نسبت تعداد پرتقال‌ها به تعداد سیب‌ها در یک ظرف میوه (شکل ۲).




**شکل۲: نمایش نسبت ۲ به ۳، به شکل کسر $\frac{۲}{۳}$ در زیرساختار نسبت**

#### ۳-۱-۲- زیرساختار عملگر

لامون عملگر را به عنوان یک تبدیل تعریف می‌کند که پاره‌خط‌ها را کوتاه یا بلند می‌کند، تعداد را در یک مجموعه از اشیا، کاهش یا افزایش می‌دهد یا شکل‌ها را در صفحه هندسی و نقشه بزرگنمایی می‌کند[۶]. مفهوم عملگر می‌تواند در بردارنده تفکری جبری باشد همانند تابعی که شکل‌های هندسی یا مجموعه‌ای از اشیا را تغییر می‌دهد [۲]. به‌عنوان مثال، $\frac{۲}{۳}$ می‌تواند به‌عنوان دو- سوم از کمیتی درک شود. $\frac{۲}{۳}$ از ۱۲ تا مثلث، ۸ تا مثلث می‌شود (شکل ۳).



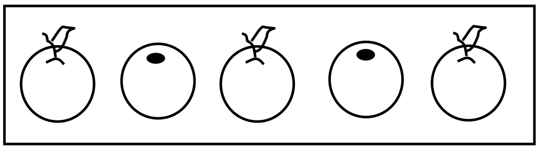
**شکل۳: نمایش $\frac{۲}{۳}$ در زیرساختار عملگر**

#### ۴-۱-۲-زیرساختار خارج‌قسمت

در زیرساختار خارج‌قسمت، هر کسر به‌عنوان نتیجه یا خارج قسمت یک تقسیم در نظر گرفته می‌شود. به طور خاص، کسر $\frac{x}{y}$ بر ارزش عددی به‌دست آمده از تقسیم x بر y دلالت می‌کند به‌طوری که x و y، هر دو اعداد صحیح هستند و $y\neq ۰$ [۲]. مثلاً، کسر $\frac{۲}{۳}$ می‌تواند به‌عنوان خارج‌قسمت ۳÷۲ یا نتیجه تقسیم دو پیتزا میان سه نفر، به‌طوری که به هر نفر، $\frac{۱}{۳}$ از هر پیتزا یا $\frac{۲}{۳}$ از کل پیتزاها می‌رسد، تفسیر شود.

#### ۵-۱-۲- زیرساختار اندازه

در زیرساختار اندازه، کسر به‌عنوان یک عدد معرفی می‌شود که ویژگی کمّی بودن کسرها را بیان می‌کند و به یک فاصله، اندازه‌ای را اختصاص می‌دهد. بدین منظور، کسری با صورت واحد (مانند $\frac{۱}{a}$) تعریف می‌شود و با تکرار این کسر از یک مبدأ معین، فاصله مورد نظر تعیین می‌شود [۶]. برای مثال $\frac{۲}{۳}$ با فاصله‌ی ۲ تا $\frac{۱}{۳}$ واحد از مبدأ متناظر است (شکل ۴).



**شکل۴: نمایش $\frac{2}{3}$ در زیرساختار اندازه روی محور اعداد**

همچنین، شورای ملی معلمان ریاضی عقیده دارد که دانش‌آموزان پایه‌های ۸-۶ باید علاوه بر این‌که قادر به تشخیص و به‌کارگیری کسرها به‌عنوان اندازه، مقدار، جزءای از کل، موقعیت روی محور اعداد و وضعیت‌های که بر تقسیم دلالت می‌کنند، باشند که در پایه‌های قبلی آموخته‌اند، کسرها را در روش‌های جدید نیز تشخیص دهند و به‌کار گیرند. به عنوان مثال، آنها باید با مسائل دربردارنده مفاهیم نسبت (۳ مربی برای هر ۸ دانش‌آموز)، نرخ[۱۸] (گل شدن ۳ توپ از هر ۸ توپ در پنالتی زدن در بازی فوتبال) و عملگر (ضرب یک مقدار در $\frac{3}{8}$ به این معناست که مقدار جدید، $\frac{3}{8}$ مقدار اولیه است) نیز مواجه شوند[۹].

**۲-۲- دسته‌بندی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در درک مفهوم کسر**

همانطور که پیش از این ذکر شد زیر ساختارهای کسر، عامل‌های مهمی در درک مفهومیِ کسرها هستند. عدم درک صحیح مفهوم کسر موجب بروز بدفهمی در دانش‌آموزان می‌گردد. اوزکان و اوزکان[۱۹] بد فهمی را به‌عنوان دانشی تعریف می‌کنند که مانع یادگیری حقایق علمی می‌شود و بر مبنای تجارب شخصی فرد است. به‌عقیده‌ی آنان بدفهمی‌ها مفاهیم نادرستی هستند که درست فرض می‌شوند و از روی عادت به‌کار برده می‌شوند[۱۵]. علم‌الهدایی معتقد است که بدفهمی معمولاً زمانی اتفاق می‌افتد که شاگردان مجبورند از یک حوزه ریاضی به حوزه‌ای دیگر و یا از یک فعالیت به فعالیتی دیگر بروند، چون در عمل، قوانین و رویه‌های گذشته در شرایط جدید، عیناً قابل اقتباس و به‌کارگیری نیستند[۸]. چنان‌که، در نظر گرفتن کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل و تعمیم نادرست مفاهیم و رویه‌های اعداد صحیح به کسرها توسط دانش‌آموزان در گذر از اعداد صحیح به کسرها بروز می‌نماید[۱۶]. به‌عنوان مثال، درک کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل و عدم پذیرش کسر به‌عنوان عدد، منجر به بروز بدفهمی در جمع کسرها (مثلاً، $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{6}$) می‌شود [۱۷و۱۸]. پژوهش‌های مختلفی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در کسرها را شناسایی کرده‌اند. برای داشتن تصویری جامع از پیشینه پژوهشیِ بررسی شده در مورد بدفهمی‌های دانش‌آموزان از مفهوم کسر، نتایج آن در جدول۱ خلاصه شده است.

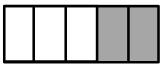
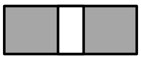
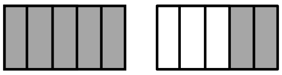
**۳-۲- حل مسئله، استدلال و راهبرد**

گانیه حل‌مسئله را به مثابه عالی‌ترین شکل یادگیری می‌داند و آن را این‌گونه تعریف می‌کند: "فرآیندی است که به کمک آن یادگیرنده ترکیبی از قاعده‌های آموخته شدهٔ قبلی خود را کشف می‌نماید و می‌تواند آنها را به‌گونه‌ای به‌کار گیرد که او را به حل یک مسئلهٔ جدید نایل سازد"[۸]. پولیا مسائل را از حیث خواسته و هدف به دو دسته تقسیم می‌کند[۲۴].

۱- اثبات کردنی: در این مسائل، هدف مسئله، اثبات درستی یا نادرستی یک گزاره با توجه به داده‌ها، شرایط و حقایق موجود در آن می‌باشد. همانطور که پیش از این اشاره شد، استدلال و اثبات عامل‌هایی مؤثر در توسعه درک مفهومی و روانی رویه‌ای هستند [۹] و می‌توانند زمینه‌ساز تفکر منطقی در دانش‌آموزان گردند[۲۵]. استدلال کردن، استفاده از منطق، جهت توضیح و توجیه یکی از جواب‌های مسئله یا بسط چیزی معلوم به چیزی که هنوز معلوم نیست، می‌باشد. با اندیشیدن درباره‌ی روابط منطقی بین مفاهیم و موقعیت‌ها، دانش‌آموزان می‌توانند غرق حل‌مسئله شوند و روابط بین آنها را دریابند[۱۱]. ریحانی و کلاهدوز نیز عقیده دارند که بیان دقیق‌تر شکل استدلال‌های ارائه شده توسط فراگیران همراه با روش‌های این استدلال‌ها بهتر می‌تواند نوع تفکر آنان را مشخص نماید. آنها بر این اساس، با مطالعه مدل‌ها و چارچوب‌های مختلف در زمینه استدلال و اثبات، استدلال‌های ارائه شده توسط یک شخص برای اثبات درستی یک ادعای ریاضی را از لحاظ شکل در سه دستهٔ تجربی، نمادین و روایت‌گونه طبقه‌بندی کردند[۲۵] (جدول۲).

۲- مسائل یافتنی: در این مسائل، خواسته مسئله، به‌دست آوردن مجهول مسئله است. علم‌الهدایی مسائل را از لحاظ روش‌های حل‌مسئله، به دو دستهٔ فرآیند بسته؛ حل‌مسئله فقط و فقط با یک روش آن هم به شیوهٔ کلاسیک و فرآیند باز؛ حل‌مسئله با روش‌های مختلف، تقسیم می‌کند.

**جدول۱: بدفهمی‌های دانش‌آموزان در درک مفهوم کسر**

| ردیف | بدفهمی با ذکر منابع پژوهشی | توضیحات با ارائه مثال |
|---|---|---|
| ۱ | بازنمایی کسر به‌عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل[۱۹و۲۰]. | در نظر گرفتن تعداد قسمت‌های رنگ شده برای صورت و تعداد قسمت‌های رنگ نشده برای مخرج و بالعکس. در شکل زیر دانش‌آموزان می‌گویند $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ از شکل رنگ شده است.  |
| ۲ | عدم توجه به برابری قسمت‌های افراز شده [۱۹و۲۱]. | در کسرها، قسمت‌های افراز شده از کل، باید مساوی باشند. این دانش‌آموزان در شکل زیر به کسر $\frac{۲}{۳}$ اشاره می‌کنند.  |
| ۳ | در نظر گرفتن کسر بازنمایی کننده جزء‌ای از کل به‌عنوان مقدار [ ۵]. | دانش‌آموزان در مسائل کلامی بین کسری که بخشی از یک مقدار را نشان می‌دهد و خود به تنهایی یک مقدار نیست با مقدار صحیح داده شده، به جمع، تفریق و ... می‌پردازند. دانش‌آموزان در مسئله "اگر مجموع $\frac{۴}{۹}$ و $\frac{۲}{۵}$ از یک عدد ۳۸۰ باشد، این عدد را بیابید" چنین عمل کرده بودند: $\frac{۴}{۹}+\frac{۲}{۵}=\frac{۳۸}{۴۵} \rightarrow ۳۸۰-\frac{۳۸}{۴۵}=$ |
| ۴ | شمارش تمام قسمت‌های افراز شده و رنگ شده بدون در نظر گرفتن واحد[۲۲و۱۹]. | دانش‌آموزانی که در تشخیص واحد ناتوان هستند، زمانی که شکل زیر به آن‌ها داده می‌شود، می‌گویند $\frac{۷}{۱۰}$ از شکل رنگ شده است.  |
| ۵ | در نظر گرفتن مقدار جزء به جای کل یا واحد [۵] . | دانش‌آموزان مقدار یک کمیت که خود مقدار جزء‌ای از کل است را به اشتباه به‌عنوان مقدار کل در نظر می‌گیرند. مثلاً در مسئله "۳۲۰ کتاب داستان در کتابخانه مدرسه‌ای موجود است. این کتاب‌ها $\frac{۲}{۷}$ از همه کتاب‌های کتابخانه هستند. همه کتاب‌های کتابخانه چند تا است؟" دانش‌آموزان به اشتباه پاسخ ذیل را ارائه کردند: $۳۲۰\times\frac{۲}{۷}=\frac{۶۴۰}{۷}$ |
| ۶ | شمارش علائم افراز [۲۳]. | دانش‌آموزان هنگام بازنمایی مکان مشخص شده روی محور اعداد به جای محاسبه تعداد فواصل بین علائم افراز (خط نشان‌ها)، خط‌نشان‌ها را شمارش می‌کنند. |
| ۷ | در نظر گرفتن مقدار مخرج برای تعیین مکان کسرها روی محور اعداد [۲۱]. | دانش‌آموزان با این بدفهمی، اعداد کسری $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ را به ترتیب از چپ به راست روی محور اعداد مشخص کرده بود. این دانش‌آموز استدلال کرده بود که " $\frac{۱}{۳}$ بعد از $\frac{۱}{۲}$ می‌آید و $\frac{۱}{۴}$ بعد از $\frac{۱}{۳}$ چون به ترتیب داریم ۳،۲،۱و۴". |
| ۸ | افزایش مقدار یک کسر با ضرب هر عدد صحیح مخالف با "صفر" در صورت و مخرج آن [۱۹] . | مثلاً زمانی که از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود که "با دو برابر کردن مقدار صورت و مخرج یک کسر، کسر چه تغییری می‌کند؟"، بیان می‌کنند که کسر حاصل، "بزرگتر" می‌شود. این پاسخ دانش‌آموزان به این دلیل است که عقیده دارند عمل "ضرب" آن را بزرگتر می‌سازد. |

**جدول۲: طبقه‌بندی استدلال افراد بر اساس شکل استدلال [۲۵].**

| شکل استدلال | ویژگی‌های استدلال |
|---|---|
| **تجربی** | استدلال‌هایی که بر اساس شکل (ارائهٔ تصویر) و یا ارائهٔ تعدادی مثال، درستی گزارهٔ مورد نظر را تأیید می‌کنند. |
| **نمادین** | استدلال‌هایی که صرفنظر از درستی یا نادرستی آنها با استفاده از نمادهای ریاضی، درستی گزینهٔ مورد نظر را تأیید می‌کنند. |
| **روایت‌گونه** | استدلال‌هایی که صرفنظر از درستی یا نادرستی آنها به صورت توضیحی و بدون استفاده از فرمول ریاضی، گزارهٔ مورد نظر را تأیید می‌کنند. |

به عقیدهٔ او، در مسائل فرآیند باز، دانش‌آموزان در محدودیت راه‌حل منحصربه‌فرد قرار نمی‌گیرند و باید راه‌حل‌های بیشتری را جستجو نمایند که همهٔ آنها می‌توانند درست باشند، روش‌هایی که چه بسا خلاقانه‌تر و نوآورانه‌تر هستند[۸]. روزدار عقیده دارد مسیری که یک مسئله حل‌کن انتخاب می‌کند و پس از یک روند مشخص به نتیجه می‌رسد، رهیافت[۲۰]نامیده می‌شود[۲۶]. پولیا رهیافت‌ها را "ابزارهای کشف" می‌پندارد که به‌منظور درک بهتر مسئله و رسیدن به جواب استفاده می‌شوند[ ۲۴]. روزدار بر مبنای عقیده شونفیلد، نتیجه می‌گیرد که رهیافت‌ها قواعد کلی و عمومی هستند که هرگاه به‌طور مشخص‌تر بیان شوند و برای مسائل ویژه‌ای به صورت عینی‌تر به‌کار برده شوند، آن‌ها به راهبردها تقلیل می‌یابند. بدین معنی، یک رهیافت، ترکیبی از چند راهبرد حل‌مسئله است[۲۶]. دانش‌آموزان می‌توانند

راهبردهای مختلفی را در حل مسائل کسر برگزینند. استفاده از چهار عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم از راهبردهای معمول برای حل‌مسئله در کسرها به شیوهٔ جبری است. تحقیقات نشان داده است که درک دانش‌آموزان از چهار نماد عملیاتی بسیار محدود است. برای دانش‌آموزان، جمع به معنی اضافه‌شدن، تفریق، به معنی کم شدن، ضرب به معنی چند برابر شدن و تقسیم به معنی تقسیم شدن است در کسرها، در بسیاری از موارد، عملیات، مفهوم متفاوتی به خود می‌گیرد، برای مثال، سه منهای دو، می‌تواند در آغاز با در نظر گرفتن سه شی و کم کردن دو تای آن‌ها یا تعریف منها به‌عنوان کم شدن تفسیر شود. اما در کسرها، زمانی که سه منهای یک دوم می‌شود، این‌که با سه شی شروع کنیم و نصف آن را کم کنیم، کار نادرستی است [۲۷]. از دیدگاه شورای ملی معلمان ریاضی، تناسب[۲۱] یک ریسمان یکپارچه[۲۲] با اهمیت است که بسیاری از موضوعات ریاضی مطالعه شده در پایه‌های ۸-۶ را مرتبط می‌کند[۹]. راهبرد تناسب، مساوی قرار دادن دو یا چند نسبت معادل، به‌منظور دستیابی به مقدار یک عبارت مجهول است. به‌منظور تفکر دربارهٔ کمیت‌ها و ارتباط میان آنها، این راهبرد، مستلزم تشخیص کمیت‌های مرتبط در یک تناسب و استفاده از اعداد، جدول‌ها و نمودارها و تساوی‌هاست. افرازکردن، راهبرد دیگری در حل مسائل کسر است. مفهوم افرازکردن، در واقع همان عمل تقسیم است. این راهبرد در حل مسائل شامل کسر، کاربردهای مختلفی دارد که عبارتند از: مقایسه و مرتب کردن کسرها، انجام عملیات با کسرها، به‌دست آوردن تسهیم‌های منصفانه [۲۳]، توسعه چگال بودن[۲۴] کسرها و قرار دادن کسرها روی محور اعداد [۲۱]. راهبرد رسم شکل[۲۵] نیز در آموزش ریاضی جایگاه ویژه‌ای دارد. این راهبرد به دلیل داشتن مزایای مختلف در برنامه درسی ریاضی دوره ابتدایی سنگاپور از اهمّیّت بسزایی برخودار است. این مزایا عبارتند از:

۱- به دانش‌آموزان کمک می‌کند موقعیت را تجسم کنند[۲۶].

۲- مدل ساخته شده، تصویری ملموس از یک موقعیت مجرد را فراهم می‌کند.

۳- یادگیری دانش‌آموزان را از طریق دیدن و انجام دادن ارضا می‌کند.

۴- کلمات را به تصاویر قابل تشخیص برای ذهن‌های نورس تبدیل می‌کند [۲۸].

۳- روش و ابزار پژوهش

هدف این پژوهش، بررسی درک دانش‌آموزان از مفاهیم کسر و شناسایی بدفهمی‌های آنها و انواع استدلال‌ها و راهبردهایی است که دانش‌آموزان در حل مسائل کسر به‌کار می‌گیرند. روش پژوهش، توصیفی- پیمایشی است. این پژوهش در زمره پژوهش‌های کاربردی است، زیرا نتایج آن می‌تواند در بهبود برنامه‌ریزی‌های آموزشی و طراحی برنامه‌های درسی مؤثر واقع شود. جامعه مورد مطالعه، دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی شهرستان ساوه هستند که در سال تحصیلی ۹۲-۹۱ در این شهرستان مشغول به تحصیل بودند. ۷۱ نفر (۳۸ پسر و ۳۳ دختر) از این دانش‌آموزان به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. در راستای هدف پژوهش، آزمونی در زمینه کسرها با مد نظر قرار دادن مفاهیم زیرساختارها طراحی شد. سؤالات این آزمون از پژوهش‌های معتبر و مرتبط استخراج شدند و سپس بر اساس فرهنگ کشور ایران به ویرایش و بومی‌سازی

آنها پرداخته شد. برای بررسی نحوه تفکر دانش‌آموزان و انواع راهبردها و استدلال‌های به‌کار رفته در پاسخ به سؤالات، در تمامی سؤالات آزمون از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا دلیل (دلایل) پاسخ خود را بنویسند. روایی[۲۷] محتوایی آزمون با تنظیم جدول هدف- محتوا و روایی صوری آن، توسط پنج نفر از اساتید صاحب‌نظر در آموزش ریاضی و همچنین توسط دو نفر از معلمان با تجربه پایه ششم دوره ابتدایی مورد تأیید قرار گرفت. پایایی[۲۸] آزمون نیز، با استفاده از نرم‌افزار SPSS محاسبه گردید و ضریب آلفای کرونباخ آن ۰/۷۸ به‌دست آمد. در تجزیه و تحلیل داده‌ها، از آمار توصیفی (میانگین و انحراف معیار) و استنباطی (نظیر آزمون‌های کولموگروف – اسمیرنوف، من- ویتنی و کروسکال- والیس[۲۹]) استفاده شده است. همچنین، استدلال‌های به کار رفته توسط دانش‌آموزان بر مبنای طبقه‌بندی ریحانی و کلاهدوز دسته‌بندی گردید[۲۵].

## ۴– یافته‌های پژوهش

در این قسمت پس از ارائه یافته‌های مبتنی بر عملکرد دانش‌آموزان در زیرساختارهای کسر، نتایج تجزیه و تحلیل

پاسخ‌های دانش‌آموزان به برخی از سؤالات آزمون (به‌دلیل محدودیت)، به تفکیک ارائه می‌شود. سپس انواع راهبردها و استدلال‌های به‌کار رفته توسط دانش‌آموزان در پاسخ به سؤالات آزمون طبقه‌بندی می‌گردد. در پایان، به سؤالات پژوهش پاسخ داده می‌شود.

**۴-۱- بررسی عملکرد دانش‌آموزان در زیرساختارهای کسر**

در این پژوهش از آماره‌های میانگین و انحراف معیار برای بررسی عملکرد دانش‌آموزان در پنج زیرساختار استفاده شده است. این یافته‌ها در جدول۳، ارائه شده است. همان‌طورکه ملاحظه می‌شود دانش‌آموزان با میانگین ۰/۶۳، بهترین عملکرد را در زیرساختار جزء به کل داشتند و ضعیف‌ترین عملکرد آنان با میانگین ۰/۳۰، در زیرساختار اندازه مشاهده شد. دانش‌آموزان، در سه زیرساختار نسبت، عملگر و خارج قسمت به ترتیب با میانگین ۰/۴۳، ۰/۳۹ و ۰/۳۲ عملکرد متوسطی داشتند.

**جدول۳: عملکرد دانش‌آموزان در پنج زیرساختار کسر و بررسی وضعیت نرمال بودن آنها**

| زیر ساختار | میانگین نمرات | انحراف استاندارد نمرات | کولموگروف- اسمیرنوف z | sig |
|---|---|---|---|---|
| جزء به کل | ۰/۶۳ | ۰/۳۷ | ۱/۹۷۶ | ۰/۰۰۱ |
| نسبت | ۰/۴۳ | ۰/۳۶ | ۲/۰۱۶ | ۰/۰۰۱ |
| عملگر | ۰/۳۹ | ۰/۳۵ | ۲/۱۳۳ | ۰/۰۰۰ |
| خارج قسمت | ۰/۳۲ | ۰/۳۷ | ۲/۶۷۰ | ۰/۰۰۰ |
| اندازه | ۰/۳۰ | ۰/۳۰ | ۱/۵۱۵ | ۰/۰۲۰ |

برای بررسی معناداری تفاوت بین پنج زیرساختار، باید داده‌ها از نظر نرمال بودن مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از آزمون کولموگروف- اسمیرنوف استفاده شد تا از نرمال بودن داده‌ها اطمینان حاصل گردد. همانطور که در جدول۳ مشاهده می‌شود چون آماره آزمون برای هریک از متغیرها کوچکتر از ۰/۰۵ به‌دست آمد، توزیع داده‌ها نرمال نیست. بنابراین برای مقایسه میانگین هر جفت از زیرساختارها باید از آزمون ناپارامتریک من- ویتنی استفاده کرد. نتایج این آزمون در جدول۴ گزارش شده است. با به‌کارگیری آزمون من- ویتنی، مشاهده شد که تفاوت بین زیرساختارهای جزء به کل و چهار زیرساختار دیگر عملگر، خارج قسمت، اندازه و نسبت، و همچنین بین دو زیرساختار اندازه و نسبت در سطح $p<0/05$ از نظر آماری نیز، معنادار است (جدول۴). این نتایج نشان داد که عملکرد دانش‌آموزان در زیرساختار جزء به کل با بقیه‌ی زیرساختارها، و زیرساختار اندازه با نسبت متفاوت است. بنابراین، عملکرد دانش‌آموزان در زیرساختار جزء به کل بهتر از چهار زیرساختار دیگر نسبت، عملگر، خارج قسمت و اندازه و همچنین، عملکرد آن‌ها در زیرساختار نسبت، بهتر از زیرساختار اندازه است.

**جدول۴: معناداری تفاوت عملکرد دانش‌آموزان بین هر جفت از زیرساختارها**

| جفت زیرساختارها | من- ویتنی U | معناداری ($p<0/05$) |
|---|---|---|
| جزء به کل- عملگر | ۱۶۲۸/۰۰۰ | ۰/۰۰۰ |
| جزء به کل- خارج قسمت | ۱۴۱۳/۰۰۰ | ۰/۰۰۰ |
| جزء به کل- اندازه | ۱۲۵۷/۰۰۰ | ۰/۰۰۰ |
| جزء به کل-نسبت | ۱۷۶۴/۰۰۰ | ۰/۰۰۱ |
| عملگر- خارج قسمت | ۲۲۲۰/۵۰۰ | ۰/۱۸۳ |
| عملگر- اندازه | ۲۰۶۰/۵۰۰ | ۰/۰۵۱ |
| عملگر- نسبت | ۲۳۹۳/۰۰۰ | ۰/۵۷۲ |
| خارج قسمت- اندازه | ۲۵۰۰/۵۰۰ | ۰/۹۳۲ |
| خارج قسمت- نسبت | ۲۱۰۸/۰۰۰ | ۰/۰۶۹ |
| اندازه- نسبت | ۱۹۳۲/۰۰۰ | ۰/۰۱۳ |

برای بررسی تفاوت درک پنج زیرساختار توسط دانش‌آموزان از آزمون ناپارامتریک کروسکال- والیس استفاده شد. نتایج این آزمون در جدول۵ ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود آماره آزمون با ۴ درجه آزادی کوچکتر از ۰/۰۵ به‌دست آمد. در این صورت فرض صفر رد می‌شود و دانش‌آموزان به‌طور کلی، درک متفاوتی از زیرساختارها دارند.

**جدول۵: نتایج آزمون کروسکال- والیس**

| Chi- square | df | sig |
|---|---|---|
| ۳۶/۲۱۶ | ۴ | ۰/۰۰۰ |

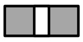
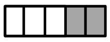
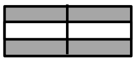
**۴-۲- بررسی سؤالات آزمون و شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان**

به منظور بررسی نحوه درک هریک از زیرساختارها توسط دانش‌آموزان، شناسایی بدفهمی‌های آنان و انواع استدلال‌ها و راهبردهایی که در حل مسائل کسر به‌کار می‌گیرند، پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مورد بررسی قرار

گرفته است. پاسخ‌های دانش‌آموزان به برخی از این سؤالات در ادامه ارائه شده و اطلاعات آماری در قالب جدول‌های فراوانی (درصد) نشان داده شده است.

❖ **سؤال اول: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار جزء به کل**

دورگزینه‌هایی که $\frac{۲}{۳}$ (مقدار رنگ شده) را نشان می‌دهند، خط بکشید[۱۷].

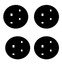
الف)  ب)  پ) 

ت) تعدادی دانش‌آموز داریم و آن‌ها را به سه گروه مساوی تقسیم می‌کنیم و دو گروه از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

ث) تعدادی دانش‌آموز داریم و آن‌ها را به پنج گروه مساوی تقسیم می‌کنیم و دو گروه از آن‌ها را در نظر می‌گیریم.

همان طور که در جدول۶ مشاهده می‌شود، بیش‌تر دانش‌آموزانی که تنها به یک گزینه‌ی درست اشاره کردند، گزینه "ت" را به‌عنوان پاسخ درست برگزیدند. تقریباً نیمی از دانش‌آموزان نتوانستند گزینه "پ" که نشان‌دهنده‌ی کسری هم ارز با $\frac{۲}{۳}$ است را شناسایی کنند. درک این دانش‌آموزان از $\frac{۲}{۳}$، به درک ۲ قسمت از ۳ قسمت مساوی که واحد را می‌سازد، محدود است. این دانش‌آموزان قادر نیستند کسرهای هم ارز با یک کسر داده شده را در بازنمایی‌های مختلف شناسایی کنند. بدفهمی که پیش از این نیز به آن اشاره شده است [۱۹]. در این سؤال برخی از دانش‌آموزان بدون توجه به برابری قسمت‌ها، به گزینه‌ی "الف" اشاره کردند (جدول۷). عدم توجه به برابری قسمت‌های افراز شده از بدفهمی‌های رایج بین دانش‌آموزان است [۱۹،۲۰و۲۱]. همچنین، دانش‌آموزی گزینه‌ی "ب" را به‌عنوان پاسخ درست انتخاب کرد. بازنمایی کسر به‌عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است[۱۹و۲۰].

❖ **سؤال دوم: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار جزء به کل**

اگر $\frac{۲}{۳}$ از تیله‌ها به صورت  باشد، کل تیله‌ها را بکشید[۲۳].

با توجه به جدول۸، دانش‌آموزان راهبردهای مختلفی را برای حل‌مسئله برگزیدند. آن‌ها با کمک تناسب یا افراز کردن و یا با راه‌حل جبری به مسئله پاسخ دادند. دانش‌آموزان با درک درست زیرساختار جزء به کل، توانستند کل که بخشی از آن داده شده بود را به‌درستی تعیین کنند. در پاسخ‌های نادرست، بسیاری از دانش‌آموزان با در نظر گرفتن مقدار مخرج و نادیده گرفتن صورت کسر داده شده، کل تیله‌ها را ۱۲ عدد ذکر کردند. در نظر گرفتن صورت و نادیده گرفتن مخرج کسر وقتی که کل داده شده است و جزءای از آن خواسته می‌شود از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است [۱۹]. به نظر می‌رسد، در نظر گرفتن مخرج و نادیده گرفتن صورت کسر وقتی که جزءای از کل داده شده است و کل خواسته می‌شود نیز از بدفهمی های دانش‌آموزان باشدهمچنین برخی از دانش‌آموزان عددی کسری را برای پاسخ ارائه کردند (جدول۹). این پاسخ‌ها می‌تواند تأثیر تدریس رویه‌ای باشد و حاکی از آن است که دانش‌آموزان درستی پاسخ‌های خود را کنترل نمی‌کنند و نمی‌توانند پاسخ مسئله را تخمین بزنند. چرا که دانش‌آموزان با درک مفهومی، دست کم می‌توانستند حدس بزنند که چون تعداد تیله‌ها خواسته شده است پاسخ باید عددی حسابی باشد.

❖ **سؤال سوم: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار نسبت**

آیا این جمله درست است؟ "اگر صورت و مخرج یک کسر را دو برابر کنیم، در این صورت مقدار کسر دو برابر می‌شود" پاسخ خود را توضیح دهید[ ۶].

همان‌طور که در جدول۱۰ مشاهده می‌شود، بسیاری از دانش‌آموزان نتوانستند به این مسئله پاسخ درستی دهند. برخی از دانش‌آموزان با ارائه‌ی مثال‌های عددی درست، مانند $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۲}{۷}$، به نادرستی این‌گونه استدلال کردند که "زمانی که صورت و مخرج یک کسر را دو برابر می‌کنیم کسری بزرگ‌تر حاصل می‌شود پس درست است که کسر حاصل دو برابر می‌شود". این دانش‌آموزان بدون توجه به تساوی بین دو کسر، این استدلال نادرست را بیان کردند. استدلال‌های ارائه شده توسط این دانش‌آموزان حاکی از آن است که درک

**جدول۶: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال اول**

| | فراوانی (درصد) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| انواع پاسخها | پ و ت | پ | ت | الف و ت | الف و ب | ت وث | الف | ب | مجموع |
| اشاره به یک مورد درست | | ۳ (۴) | ۲۱ (۳۰) | | | | | | ۲۴ (۳۴) |
| اشاره به دو مورد درست | ۳۲ (۴۵) | | | | | | | | ۳۲ (۴۵) |
| نادرست | | | | ۷ (۱۰) | ۱ (۱) | ۱ (۱) | ۳ (۴) | ۱ (۱) | ۱۳ (۱۸) |
| بی پاسخ | | | | | | | | | ۲ (۳) |

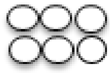
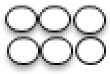
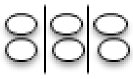
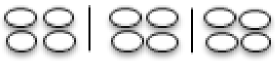
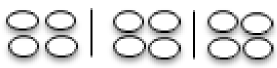
**جدول۷: نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال اول**

| انواع پاسخها | نمونه‌ای از استدلال‌های روایت‌گونه دانش‌آموزان |
|---|---|
| اشاره به یک مورد درست | پاسخ معصومه: گزینه ت، زیرا در گزینه‌ی ت سه گروه دانش‌آموز هستند و دو قسمت آن را انتخاب می‌کنیم و بنابراین می‌گوییم دو قسمت از سه قسمت یعنی $\frac{۲}{۳}$. |
| اشاره به دو مورد درست | پاسخ فاطمه: گزینه‌ی پ، به دلیل این‌که این شکل به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده و ۴ قسمت آن رنگ شده و کسر آن $\frac{۴}{۶}$ است که این کسر مساوی $\frac{۲}{۳}$ است و گزینه‌ی ت، زیرا به ۳ گروه تقسیم شده و ۲ گروه از آنها انتخاب شده‌اند و این کسر $\frac{۲}{۳}$ است. |
| نادرست | پاسخ طیّبه: گزینه‌ی الف و ت، چون هر دو، دو قسمت از سه قسمت!یعنی $\frac{۲}{۳}$ را نشان می‌دهند. |

**جدول۸: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال دوم**

| | فراوانی (درصد) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| انواع راهبردها / انواع پاسخها | تناسب | افزازکردن | | جبری | بدون ارائه راهبرد | مجموع |
| | | کلامی | رسم شکل | | | |
| درست | ۲ (۳) | ۱۱ (۱۵) | ۹ (۱۳) | ۶ (۸) | ۱۸ (۲۵) | ۴۶ (۶۵) |
| نادرست | ۰ (۰) | ۲ (۳) | ۲ (۳) | ۳ (۴) | ۷ (۱۰) | ۱۴ (۲۰) |
| بی‌پاسخ | | | | | | ۱۱ (۱۵) |

جدول۹: نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال دوم

<table>
<tr><th>انواع پاسخ‌ها</th><th>انواع راهبردها</th><th colspan="2">نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش آموزان</th></tr>
<tr><td rowspan="4">درست</td><td>تناسب</td><td colspan="2">پاسخ مریم:  $\begin{array}{c|c} ۲ & ۴ \\ \hline ۳ & ۶ \end{array}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">افراز کردن</td><td>کلامی</td><td>پاسخ علی: اگر ۲ صورت کسر و ۳ هم مخرج کسر باشد پس ۲ دسته داریم و باید ۳ دسته شود و در هر دسته ۲ تیله داریم (این دانش‌آموز با در نظر گرفتن صورت کسر، شکل را به دو دسته افراز کرده است. بنابراین، در هر دسته ~~۴ تیله~~ وجود دارد و چون مخرج کسر ۳ است پس یک دسته دیگر حاوی ~~۴ تیله~~ باید به شکل افزوده شود) پس: </td></tr>
<tr><td>شکل</td><td>پاسخ نیما: </td></tr>
<tr><td>جبری</td><td colspan="2">پاسخ مینا: ۱۲ +۲ = ۶    ۴ × ۳ = ۱۲</td></tr>
<tr><td rowspan="3">نادرست</td><td rowspan="2">افراز کردن</td><td>کلامی</td><td>پاسخ حسین: زیرا مخرج آن ۳ است و در شکل $\frac{1}{3}$ کسر را با چهار شکل نشان داده و باید چهار تیله را ۳ برابر کنیم. </td></tr>
<tr><td>شکل</td><td>پاسخ صادق: </td></tr>
<tr><td>جبری</td><td colspan="2">پاسخ امیرعلی: $\frac{2}{3} \times ۴ = \frac{8}{3} = ۲\frac{2}{3}$</td></tr>
</table>

**جدول۱۰: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال سوم**

<table>
<tr><th rowspan="2">انواع استدلال / انواع پاسخ‌ها</th><th colspan="5">فراوانی (درصد)</th></tr>
<tr><th colspan="2">تجربی</th><th rowspan="2">روایت‌گونه</th><th rowspan="2">بدون ارائه استدلال</th><th rowspan="2">مجموع</th></tr>
<tr><th></th><th>مثال عددی</th><th>رسم شکل</th></tr>
<tr><td>درست</td><td>۴<br>(۶)</td><td>۴<br>(۶)</td><td>۱۱<br>(۱۵)</td><td>۱۲<br>(۱۷)</td><td>۳۱<br>(۴۴)</td></tr>
<tr><td>نادرست</td><td>۱۰<br>(۱۴)</td><td>۰<br>(۰)</td><td>۱۹<br>(۲۶)</td><td>۹<br>(۱۳)</td><td>۳۸<br>(۵۳)</td></tr>
<tr><td>بدون پاسخ</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>۲<br>(۳)</td></tr>
</table>

درستی از نسبت ندارند و با این‌که می‌توانند کسرهای هم‌ارز را ارائه کنند، اما درک آن‌ها از هم‌ارزی کسرها مفهومی نیست و رویه‌ای است (جدول۱۱). این بدفهمی به دلیل این عقیده که عمل "ضرب" اعداد را بزرگتر می‌سازد، شکل می‌گیرد[۱۹و۲۱]. دانش‌آموزانی که قادرند کسرهای هم‌ارز را بیابند، لزوماً نمی‌توانند این ویژگی که اگر در رابطه نسبت، دو کمیت با هم تغییر کنند، نسبت بین آن‌ها ثابت باقی می‌ماند و تغییری نمی‌کند را درک کنند[۶].

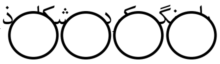
❖ **سؤال چهارم: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار نسبت**

| |
|---|
| مریم و زهرا شربت پرتقالی را برای میهمانی درست کردند. مریم دو فنجان شربت پرتقال را با پنج فنجان آب و زهرا چهار فنجان شربت پرتقال را با هشت فنجان آب مخلوط کرد. شربت مریم غلیظ‌تر است یا زهرا[ ۱۷]؟ پاسخ‌تان را با شکل یا هر طور که می‌توانید توضیح دهید. |

عملکرد دانش‌آموزان در این سؤال در جدول۱۲ ارائه شده است.

برخی از دانش‌آموزان با مقایسه نسبت‌ها، به پاسخ درست دست یافتند. آن‌ها رابطه‌ی بین شربت پرتقال و آب را به‌درستی تشخیص دادند و این رابطه را به‌صورت کسر بیان کردند و سپس به مقایسه‌ی دو کسر پرداختند. عده‌ای از آنان با کشیدن شکل درستی پاسخ خود را توجیه کردند. شکل‌ها حاکی از آن بود که آن‌ها تعداد فنجان‌های شربت را با تعداد فنجان‌های آب متناظر و چنین استدلال کردند که زهرا هر فنجان شربت را با دو فنجان آب مخلوط می‌کند ولی مریم هر فنجان شربت را با دو فنجان و نیم آب مخلوط می‌کند، بنابراین شربتی که مریم درست می‌کند رقیق‌تر است. در این سؤال، تعدادی از دانش‌آموزان با این‌که به زهرا به‌عنوان جواب درست اشاره کرده بودند اما در توجیه پاسخ خود تنها عامل غلیظ‌تر شدن شربت زهرا را در تعداد فنجان شربت‌های بیشتر دانستند که استدلالی کاملاً نادرست می‌باشد، از این‌رو این نوع پاسخ‌ها، جزء پاسخ‌های نادرست دسته‌بندی شدند. همچنین برخی از آنان با بیان این‌که مریم برای درست کردن شربت از مقدار آب کمتری استفاده می‌کند، شربت مریم را غلیظ‌تر دانستند. دانش‌آموزان در هر دو مورد بدون در نظر گرفتن نسبت تعداد فنجان‌های آب و شربت، تنها با اکتفا به یکی از آن دو نتیجه‌گیری کردند (جدول۱۳).

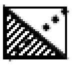
❖ **سؤال پنجم: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار عملگر**

| |
|---|
| چهار پیتزا خریداری شد. $\frac{۱}{۳}$ کل پیتزاها خورده شد. مقدار پیتزای خورده شده را با رنگ کردن شکل ذیل مشخص کنید.[۴].  |

عملکرد دانش‌آموزان در این سؤال در جدول۱۴ ارائه شده است. در این سؤال، برخی از دانش‌آموزان توانستند با تقسیم هر پیتزا به سه قسمت مساوی و رنگ کردن یک قسمت از آن به سؤال به‌درستی پاسخ دهند. بعضی از آن‌ها یک پیتزای کامل و ثلثی از پیتزای دیگر ( $\frac{۴}{۳}$ کل پیتزاها) را رنگ کردند. دانش‌آموزی، ابتدا با تقسیم ۳ پیتزا بین ۳ نفر، نتیجه گرفت که به هر نفر یک پیتزا می‌رسد و بنابراین یک پیتزا باقی می‌ماند، سپس پیتزای باقی مانده را به سه قسمت تقسیم کرد و به طور کلی نتیجه گرفت که به هر نفر $۱\frac{۱}{۳}$ پیتزا می‌رسد.

برخی از دانش‌آموزان، بدون درک درست مسئله، کاملاً رویه‌ای عمل کرده و $\frac{۱}{۳}$ را از ۴ کم کرده و $۳\frac{۲}{۳}$ از شکل را رنگ کردند. این دانش‌آموزان کسر بازنمایی کننده جزءای از کل (یعنی $\frac{۱}{۳}$) را به اشتباه به‌عنوان مقدار در نظر گرفتند. در نظر گرفتن کسر بازنمایی کننده جزءای از کل به‌عنوان مقدار از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است[۵]. در حقیقت، این دانش‌آموزان نمی‌توانند بین کسر به‌عنوان جزءای از کل و یک مقدار تمایز قائل شوند. بعضی از آنها نیز هر پیتزا را به چهار قسمت تقسیم و یک قسمت از هر پیتزا را رنگ کردند. اکثر دانش‌آموزان نتوانستند کسر را به‌عنوان یک عملگر درک کنند (جدول۱۵).

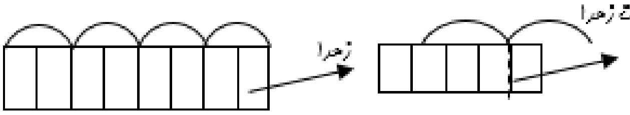
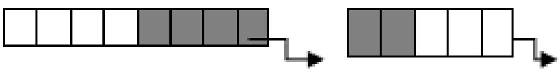
جدول۱۱: نمونه‌ای از استدلال‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال سوم

| انواع پاسخ‌ها | انواع استدلال | | نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان |
|---|---|---|---|
| درست | تجربی | مثال عددی | پاسخ دانیال: نادرست است چون اگر $\frac{2}{5}$ شده باشد $\frac{4}{10}$، باز $\frac{2}{5}$ با $\frac{4}{10}$ مساوی است. |
| | | رسم شکل | پاسخ نگار: نادرست است، زیرا وقتی این کار را انجام می‌دهیم فقط قسمت‌ها بیشتر می‌شود و کسر مساوی به‌دست می‌آوریم، مثلاً  |
| | روایت‌گونه | | پاسخ میثم: نادرست است زیرا دو کسر با هم مساوی‌اند و هر دوی صورت و مخرج دو برابر می‌شوند و با ساده کردن آن به کسر اول می‌رسیم. |
| نادرست | تجربی | مثال عددی | پاسخ الهام: درسته، زیرا اگر کسری مثلاً $\frac{2}{3}$ را هم صورت و هم مخرجش را در ۲ ضرب کنیم عدد بزرگتر می‌شود. $\frac{۲}{۳} - \frac{۴}{۶}$ |
| | روایت‌گونه | | پاسخ امیرعلی: درست است، چون وقتی صورت و مخرج کسری را دو برابر می‌کنیم کسر جدید بزرگتر می‌شود. |

جدول۱۲: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال چهارم

| | فراوانی (درصد) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| انواع استدلال<br>انواع پاسخ‌ها | تجربی<br>(رسم شکل) | روایت‌گونه | نمادین<br>(تناسب) | بدون ارائه استدلال | مجموع |
| درست | ۷<br>(۱۰) | ۷<br>(۱۰) | ۱۳<br>(۱۸) | ۳<br>(۴) | ۳۰<br>(۴۲) |
| نادرست | ۲<br>(۳) | ۱۴<br>(۲۰) | ۴<br>(۶) | ۴<br>(۶) | ۲۴<br>(۳۴) |
| بدون پاسخ | | | | | ۱۷<br>(۲۴) |

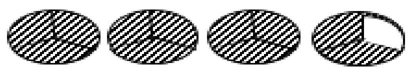
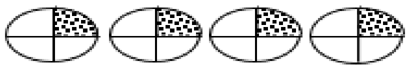
جدول۱۳: نمونه‌ای از استدلال‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال چهارم

| انواع پاسخ‌ها | انواع استدلال | نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان |
|---|---|---|
| درست | نمادین | پاسخ حمیدرضا: زهرا چون $\frac{۲\times۸}{۵\times۸} \bigcirc \frac{۴\times۵}{۸\times۵} \longrightarrow \frac{۱۶}{۴۰} < \frac{۲۰}{۴۰}$ |
| | | پاسخ رضا: زهرا چون زهرا آب کمتری ریخته. $\frac{۵}{۲} = ۲\frac{۱}{۲} > \frac{۴}{۲} = ۲$ |
| | تجربی | پاسخ زیبا: شربت زهرا مریم زهرا  |
| | روایت‌گونه | پاسخ بهاره: زهرا، چون برای هر دو فنجان آب یک فنجان شربت پرتقال می‌ریزه ولی مریم برای هر دو فنجان و نیم آب یک فنجان شربت پرتقال میریزه. |
| نادرست | تجربی | پاسخ صالح: مریم چون مریم زهرا  |
| | روایت‌گونه | پاسخ فاطمه: مریم، چون مقدار آب کمتری ریخته. |
| | | پاسخ نیما: شربت زهرا، زیرا شربت پرتقال زیادی ریخته است. |
| | نمادین | پاسخ محمدرضا: زهرا چون $۸-۴=۴ \quad ۵-۲=۳$ |

**جدول۱۴: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال پنجم**

| انواع پاسخ‌ها | انواع استدلال | فراوانی (درصد) نمادین | روایت‌گونه | بدون ارائه استدلال | مجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| درست | رنگ کردن $\frac{۱}{۳}$ از هر پیتزا | ۱ (۱) | ۰ (۰) | ۲۱ (۳۰) | ۲۲ (۳۱) |
| | رنگ کردن $\frac{۴}{۳}$ کل پیتزاها | ۲ (۳) | ۱ (۱) | ۶ (۸) | ۹ (۱۲) |
| نادرست | | ۳ (۴) | ۰ (۰) | ۲۶ (۳۷) | ۲۹ (۴۱) |
| بدون پاسخ | | | | | ۱۱ (۱۶) |

**جدول۱۵: نمونه‌ای از استدلال‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال پنجم**

| انواع پاسخ‌ها | انواع استدلال | | نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان |
|---|---|---|---|
| درست | رنگ کردن $\frac{۱}{۳}$ هر پیتزا | نمادین | پاسخ ساجده: $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$  |
| | رنگ کردن $\frac{۴}{۳}$ کل پیتزاها | نمادین | پاسخ رضا: $۴\times\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}=۱\frac{۱}{۳}$  |
| | | روایت‌گونه | پاسخ محسن: چون اگر بخواهیم ۳ قسمت کنیم به هر کس یکی کامل و یکی از واحدهای باقی مانده را باید خورد (خرد) کنیم تا جواب کامل شود  |
| نادرست | نمادین | | پاسخ طه: $\frac{۴\times۳}{۱\times۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱۱}{۳}=۳\frac{۲}{۳}$  |
| | بدون ارائه استدلال | | پاسخ نگین:  |

### ❖ سؤال ششم: سنجش درک دانش‌آموزان از زیرساختار خارج‌قسمت

> سه پیتزا به‌طور مساوی میان چهار دوست تقسیم می‌شود. چه مقدار پیتزا به هر دوست می‌رسد[۶]؟

عملکرد دانش‌آموزان در این سؤال در جدول۱۶ خلاصه شده است. برخی از دانش‌آموزان توانستند ۳ را به ۴ تقسیم کرده و به کسر $\frac{۳}{۴}$ یا عدد ۰/۷۵ اشاره کنند. تعدادی از آن‌ها ابتدا با محاسبه‌ی کل تعداد تکه‌های کوچک و تقسیم آن میان چهار نفر، به سه تکه اشاره کردند. دانش‌آموزانی با کشیدن شکل، این تقسیم را انجام دادند. ظاهراً، دانش‌آموزانی که پاسخ درستی به مسئله ارائه کردند، درک درستی از زیرساختار خارج قسمت دارند. همچنین، این دانش‌آموزان می‌توانند نقش مقسوم و مقسوم علیه در تقسیم را به‌درستی تشخیص دهند.

اکثر پاسخ‌های نادرست، پاسخ‌هایی بودند که تنها به ذکر یک عدد اکتفا شده بود و دلیلی برای پاسخ داده شده ذکر نشده بود. بعضی از پاسخ‌های نادرست حاکی از آن بود که دانش‌آموزان در تشخیص مقسوم و مقسوم‌علیه مشکل دارند و نمی‌توانند این دو را به‌درستی تشخیص دهند و به جای تقسیم ۳ بر ۴، ۴ را بر ۳ تقسیم کرده و پاسخ $۱\frac{۱}{۳}$ را ارائه کرده بودند. عدم پذیرش کسرها به‌عنوان خارج‌قسمت تقسیم

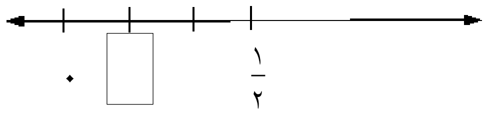
دو کمیت صحیح و تقسیم اعداد صحیح بزرگتر مسئله بر اعداد کوچکتر ناشی از عدم توسعه طرحواره ذهنی دانش‌آموزان از اعداد صحیح است. تعدادی از دانش‌آموزان به کسر $\frac{۳}{۱۲}$ اشاره کرده بودند (جدول۱۷). شمارش تمام قسمت‌های افراز شده و رنگ شده بدون در نظر گرفتن واحد از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است[۲۲و۱۹].

❖ **سؤال هفتم: سنجش درک دانش‌آموزان از پرساختار اندازه**

عملکرد دانش‌آموزان در این سؤال در جدول۱۸ ارائه شده است. تعداد اندکی از دانش‌آموزان با بیان این‌که $\frac{۱}{۲}$ نصف محور است و قرینه‌ی آن را نسبت به این نقطه می‌یابیم، با یافتن مکان ۱، روی محور اعداد و تقسیم محور به شش قسمت مساوی به عدد $\frac{۱}{۶}$ اشاره کردند. عده‌ای از آنان به گونه‌ی دیگری عمل کردند و با بیان این‌که $\frac{۱}{۲}$ به سه قسمت تقسیم شده است، با تقسیم $\frac{۱}{۲}$ به ۳، پاسخ درست را ارائه کردند.

بسیاری از دانش‌آموزان به مسئله پاسخ نادرست دادند. اکثریت این دانش‌آموزان بدون توجه به عدد $\frac{۱}{۲}$، با بیان این‌که محور به سه قسمت تقسیم شده است به کسر $\frac{۱}{۳}$ اشاره کردند. برخی از آنان به کسر $\frac{۲}{۴}$ اشاره کردند. این پاسخ‌ها می‌تواند تأثیر تدریس رویه‌ای باشد. پاسخ نادرست دیگری که فراوانی بیشتری را در پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان داشت، $\frac{۱}{۸}$ بود. دانش‌آموزانی که این پاسخ را ارائه کرده بودند به اشتباه با شمارش علائم افراز (خط نشان‌های) روی محور به جای فاصله‌های روی آن -با این‌که $\frac{۱}{۲}$ را در نظر گرفتند- با ضرب $\frac{۱}{۲}$ در $\frac{۱}{۴}$، پاسخ نادرست به مسئله داده بودند (جدول۱۹). شمارش علائم افراز (خط نشان‌های) روی محور اعداد، به‌جای محاسبه‌ی فاصله‌های روی آن از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان است [۲۳].

در جای خالی عدد مناسب را بنویسید[۲۹]. دلیل پاسخ خود را بنویسید.




**۳-۴- دسته‌بندی انواع استدلال و راهبردهای دانش‌آموزان**

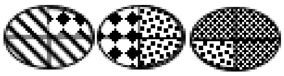
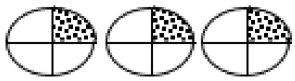
در این بخش بر اساس تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان در بخش قبلی، استدلال‌ها و راهبردهای به‌کار رفته توسط دانش‌آموزان بدون مد نظر قرار دادن درستی یا نادرستی پاسخ‌ها، شناسایی شده و دسته‌بندی گردیده است. از یازده سؤال آزمون، چهار سؤال از نوع مسائل اثبات کردنی بوده است. بر اساس دسته‌بندی ریحانی و کلاهدوز[۲۵] فراوانی استدلال‌های دانش‌آموزان در این چهار سؤال در جدول ۲۰ ارائه شده است. با توجه به این‌که سؤالات دوم و چهارم (بر مبنای جدول ۲۰) در قالب شکل و محور اعداد طراحی شده بودند، در این سؤالات، استدلال‌های دانش‌آموزان تنها در دو شکل روایت‌گونه و نمادین دسته‌بندی شدند. یافته‌ها حاکی از آن است که دانش‌آموزان عمدتاً تمایلی به توجیه پاسخ‌های خود ندارند؛ استدلال روایت‌گونه فراوانی بیشتری را میان استدلال‌های به‌کار رفته توسط دانش‌آموزان دارد؛ و دانش‌آموزان تمایل کمتری به استفاده از شکل برای توجیه پاسخ‌های‌شان دارند.

سه سؤال از یازده سؤال این آزمون به مسائل یافتنی از نوع فرآیند- باز اختصاص یافت. جدول۲۱، فراوانی (درصد) انواع راهبردهای استفاده شده توسط دانش‌آموزان را در این سه سؤال نشان می‌دهد. در سؤال اول دانش‌آموزان از سه راهبرد تناسب، افرازکردن و جبری (استفاده از عملیات محاسباتی) بهره بردند. همانطور که در جدول۲۱ مشاهده می‌شود راهبرد افرازکردن، در میان راهبردهای دانش‌آموزان در این سؤال، درصد بالایی را به خود اختصاص داد. راهبرد رسم شکل و جبری، دو راهبردی هستند که دانش‌آموزان برای حل دو مسئله دیگر از آنها بهره بردند. دانش‌آموزان در این دو سؤال، از راهبردهای جبری (عمدتاً در پاسخ‌های نادرست) بیشتر استفاده کردند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت: اول آن‌که دانش‌آموزان متناسب با شرایط هر مسئله از راهبردهای مختلفی استفاده می‌کنند؛ و دوم آن‌که در حل‌مسئله به استفاده از عملیات جبری تمایل بیشتری دارند.

**جدول ۱۶: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال ششم**

| انواع راهبرد / انواع پاسخ‌ها | جبری | رسم شکل | بدون ارائه راهبرد | مجموع |
|---|---|---|---|---|
| | فراوانی (درصد) | | | |
| درست | ۸<br>(۱۱) | ۱۶<br>(۲۲) | ۳<br>(۴) | ۲۷<br>(۳۸) |
| نادرست | ۱<br>(۱) | ۱<br>(۱) | ۲۱<br>(۳۰) | ۲۳<br>(۳۲) |
| بدون پاسخ | | | | ۲۱<br>(۳۰) |

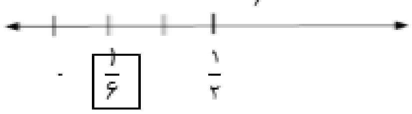
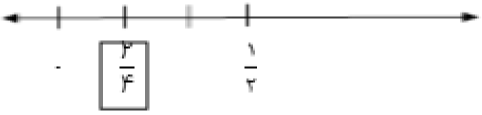
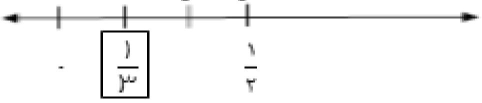
**جدول ۱۷: نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال ششم**

| انواع پاسخ‌ها | انواع راهبرد | نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان |
|---|---|---|
| درست | جبری | پاسخ فاطمه: به هر دوست $\frac{۳}{۴}$ می‌رسد. $۳ \div ۴ = \frac{۳}{۴}$ |
| | | پاسخ طه: $۱۲ \div ۴ = ۳$ $۳ \times ۴ = ۱۲$ |
| | | پاسخ امیرحسین: به هر نفر $\frac{۷۵}{۱۰۰}$ پیتزا می‌رسد. $۳/۰۰ \div ۴$<br>$-۳/۰۰ \quad ۰/۷۵$<br>$۰/۰۰$ |
| | شکل | پاسخ سینا: به هر نفر $\frac{۳}{۴}$ می‌رسد.  |
| نادرست | جبری | پاسخ فاطمه: به هر دوست می‌رسد. $۴ \div ۳ = ۱\frac{۱}{۳}$ |
| | شکل | پاسخ نیما: $\frac{۳}{۱۲}$  |

**جدول ۱۸: عملکرد دانش‌آموزان در سؤال هفتم**

| انواع استدلال / انواع پاسخ‌ها | روایت‌گونه | نمادین | بدون ارائه استدلال | مجموع |
|---|---|---|---|---|
| | فراوانی (درصد) | | | |
| درست | ۵<br>(۷) | ۲<br>(۳) | ۵<br>(۷) | ۱۲<br>(۱۷) |
| نادرست | ۱۹<br>(۲۷) | ۱<br>(۱) | ۳۳<br>(۴۶) | ۵۳<br>(۷۵) |
| بدون پاسخ | | | | ۶<br>(۸) |

جدول۱۹: نمونه‌ای از استدلال‌های دانش‌آموزان در پاسخ به سؤال هفتم

<table>
<tr><th>انواع پاسخ</th><th>انواع استدلال</th><th>نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان</th></tr>
<tr><td rowspan="2">درست</td><td>روایت‌گونه</td><td>پاسخ فاطمه: زهرا $\frac{۱}{۲}$ یعنی نصف و قرینه‌ی محور (نسبت به نقطه $\frac{۱}{۲}$) را می‌کشیم.<br>حالا محور به ۶ قسمت تقسیم شده و این نقطه $\frac{۱}{۶}$ را نشان می‌دهد.<br></td></tr>
<tr><td>نمادین</td><td>پاسخ محمدمهدی: $\frac{۱}{۲} \div ۳ = \frac{۱}{۲} \div \frac{۶}{۲} = \frac{۱}{۶}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">نادرست</td><td rowspan="2">روایت‌گونه</td><td>پاسخ شیدا: ما اول کل تقسیم شده‌های محور را در مخرج می‌نویسیم و بعد تا جایی که علامت زدند برای صورت می‌نویسیم.<br></td></tr>
<tr><td>پاسخ احسان: چون شکل سه قسمت شده و یک قسمت آن مشخص شده است.<br></td></tr>
<tr><td>نمادین</td><td>پاسخ ~~مرتضی~~: $\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$</td></tr>
</table>

**جدول۲۰: دسته‌بندی استدلال‌های دانش‌آموزان در حل مسائل کسر**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">شماره سؤال</th><th colspan="6">انواع استدلال</th></tr>
<tr><th colspan="2">تجربی</th><th rowspan="2">نمادین</th><th rowspan="2">روایت‌گونه</th><th rowspan="2">بدون ارائه استدلال</th><th rowspan="2">مجموع</th></tr>
<tr><th>مثال عددی</th><th>رسم شکل</th></tr>
<tr><td rowspan="2">۱</td><td>فراوانی</td><td>۱۴</td><td>۴</td><td rowspan="2"></td><td>۳۰</td><td>۲۱</td><td>۶۹</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۲۰</td><td>۶</td><td>۴۳</td><td>۳۰</td><td>۱۰۰</td></tr>
<tr><td rowspan="2">۲</td><td>فراوانی</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>۶</td><td>۱</td><td>۵۳</td><td>۶۰</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۱۰</td><td>۲</td><td>۸۸</td><td>۱۰۰</td></tr>
<tr><td rowspan="2">۳</td><td>فراوانی</td><td rowspan="2"></td><td>۹</td><td>۱۷</td><td>۲۱</td><td>۷</td><td>۵۴</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۱۷</td><td>۳۱</td><td>۳۹</td><td>۱۳</td><td>۱۰۰</td></tr>
<tr><td rowspan="2">۴</td><td>فراوانی</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>۳</td><td>۲۴</td><td>۳۸</td><td>۶۵</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۵</td><td>۳۷</td><td>۵۸</td><td>۱۰۰</td></tr>
</table>

**جدول۲۱: دسته‌بندی راهبردهای دانش‌آموزان در حل مسائل کسر**

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">شماره سؤال</th><th colspan="7">انواع راهبرد</th></tr>
<tr><th rowspan="2">رسم شکل</th><th rowspan="2">تناسب</th><th colspan="2">افراز کردن</th><th rowspan="2">جبری</th><th rowspan="2">بدون ارائه راهبرد</th><th rowspan="2">مجموع</th></tr>
<tr><th>کلامی</th><th>رسم شکل</th></tr>
<tr><td rowspan="2">۱</td><td>فراوانی</td><td rowspan="2"></td><td>۲</td><td>۱۳</td><td>۱۱</td><td>۹</td><td>۲۵</td><td>۶۰</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۳</td><td>۲۲</td><td>۱۸</td><td>۱۵</td><td>۴۲</td><td>۱۰۰</td></tr>
<tr><td rowspan="2">۲</td><td>فراوانی</td><td>۹</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>۱۷</td><td>۲۴</td><td>۵۰</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۱۸</td><td>۳۴</td><td>۴۸</td><td>۱۰۰</td></tr>
<tr><td rowspan="2">۳</td><td>فراوانی</td><td>۱۱</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td>۱۳</td><td>۱۵</td><td>۳۹</td></tr>
<tr><td>درصد</td><td>۲۸</td><td>۳۳</td><td>۳۸</td><td>۱۰۰</td></tr>
</table>

## ۴-۴- پاسخ به سؤالات تحقیق

**سؤال اول تحقیق: درک دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی از کسرها چگونه است و چه بدفهمی‌هایی دارند؟**

بنابر یافته‌های پژوهش، درک دانش‌آموزان عمدتاً مبتنی بر درک کسر به‌عنوان جزءای از کل است. آنان درک متوسطی از کسر به‌عنوان نسبت، عملگر و خارج قسمت دارند و عمدتاً نتوانسته‌اند کسر را به‌عنوان عدد و یا مقدار یک کمیت درک نمایند. عملکرد آنان در مجموع زیرساختارها با میانگین ۰/۴۲ ضعیف و تأمل برانگیز بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که بیشتر دانش‌آموزان نتوانسته‌اند مفهوم کسر را به‌درستی درک نمایند. با تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان مورد مطالعه در این پژوهش، بدفهمی‌های آنان در درک مفهوم کسر شناسایی شده‌اند که عبارتند از: ۱) بازنمایی کسر به‌عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل؛ ۲) عدم توجه به برابری قسمت‌های افراز شده؛ ۳) در نظر گرفتن مقدار مخرج کسر و نادیده‌گرفتن مقدار صورت؛ ۴) افزایش مقدار یک کسر با ضرب هر عدد صحیح مخالف با "صفر" در مقدار صورت و مخرج آن؛ ۵) در نظر گرفتن کسر بازنمایی کننده جزءای از کل به‌عنوان مقدار؛ ۶) شمارش تمام قسمت‌های افراز شده و رنگ شده بدون در نظر گرفتن واحد و ۷) شمارش علائم افراز.

**سؤال دوم تحقیق: دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی در پاسخ به سؤالات کسر چگونه استدلال می‌کنند و چه راهبردهایی را برمی‌گزینند؟**

یافته‌های پژوهش نشان داد که نحوه‌ی تفکر دانش‌آموزان در موقعیت‌های مختلف و از فردی به فرد دیگر متفاوت است. در مسائل ثابت کردنی، اکثر دانش‌آموزان تمایلی به توجیه پاسخ‌های خود نداشته‌اند. صحبت‌های آن‌ها حاکی از آن بود که توجیه پاسخ‌های خود را کار سخت و مشکلی می‌پندارند. استدلال‌های آنها از لحاظ شکل در سه دسته تجربی، نمادین و روایت‌گونه وابسته به نوع مسئله قابل دسته‌بندی بود. در مجموع، استدلال روایت‌گونه، فراوانی بیشتری را در بین استدلال‌های دانش‌آموزان داشت. بیشتر دانش‌آموزان تمایلی به استفاده از شکل، برای توجیه پاسخ‌های‌شان نداشته‌اند. در مسائل یافتنی از نوع فرآیند- باز نیز وابسته به نوع مسئله، دانش‌آموزان از راهبردهای مختلف جبری، افرازکردن، تناسب و رسم شکل برای حل مسائل بهره بردند. چون فرآیند افراز کردن هم‌راستا با درک زیرساختار جزء به کل است و درک دانش‌آموزان این پژوهش بیشتر مبتنی بر درک کسر به‌عنوان جزءای از کل است، تمایل استفاده دانش‌آموزان از راهبرد افرازکردن در مقایسه با تناسب قابل توجیه است. تمایل دانش‌آموزان به استفاده از راهبرد جبری در مقایسه با راهبرد رسم شکل بیشتر بوده است. عملاً، در پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان بدون درک درست مسئله و این‌که از معنای عملیات استفاده شده (جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم) آگاهی داشته باشند به جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم اعداد موجود در مسئله پرداخته‌اند. این یافته حاکی از آن است که دانش‌آموزان عمدتاً حل‌مسئله را به‌کارگیری چهار عمل جبری می‌پندارند.

## ۵- بحث و نتیجه‌گیری

نتایج پژوهش حاکی از آن است که دانش‌آموزان درک درستی از زیرساختارها ندارند و به تبع آن در حالت کلی نتوانسته‌اند مفهوم کسر را به‌درستی درک کنند. همچنین، دانش‌آموزان در کسرها با بدفهمی‌های مختلفی مواجه هستند. اکثر آنان، تمایلی به ارائه راهبرد و توجیه پاسخ‌های خود نداشتند و این کار را بسی سخت و مشکل می‌پنداشتند. در تفسیر این نتایج باید به زمینه و شرایطی که ساختارهای ذهنی دانش‌آموزان در آن شکل می‌گیرد، همچنین، برنامه و کتاب‌های درسی ریاضی توجه شود. این استدلال که تفاوت در عملکرد دانش‌آموزان در پنج زیرساختار، منعکس کننده‌ی ناهماهنگی در تأکید روی این زیرساختارها در طول آموزش است، به‌نظر منطقی می‌باشد. زیرساختار جزء به کل، زیرساختاری است که نسبت به بقیه‌ی زیرساختارها در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی بیشتر مورد تأکید است، از این‌رو دانش‌آموزان در این زیرساختار عملکرد بهتری را داشتند. تحلیل یافته‌های پژوهش حاکی از آن است که درک کسر به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل یا درک کسر به‌عنوان جزءای از کل از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در کسرها است. در واقع تعمیم نادرست دانش قبلی دانش‌آموزان از اعداد صحیح به کسرها این بدفهمی‌ها را سبب می‌شود. یافته‌های این پژوهش نتایج مشابه از تحقیقات قبلی مانند: هاسر و آبوز ، لئونگ[۳۰]، دوستی و استافیلدو و ووسنیادو را مورد تأیید قرار می‌دهند[۳۱،۳۰،۵و۱۶].

بنابراین، برنامه درسی باید موقعیت‌های مختلفی را ارائه کند تا دانش‌آموزان بتوانند کسر را به‌درستی درک کنند. برنامه‌درسی علاوه بر تلفیق مدل‌های مختلف کسر (نظیر مدل‌های پیوسته وگسسته) باید زیرساختارهای مختلف کسر (جزء به کل، نسبت، خارج قسمت، عملگر و اندازه ) را نیز تلفیق کند. معلمان نیز می‌توانند پس از شناسایی بدفهمی‌ها و عوامل ایجاد آنها، با دلایل منطقی نادرستی تفکر دانش‌آموزان را به آنها گوشزد نمایند و بنیان این بدفهمی‌ها را در ذهن آنان فرو ریزند و مفهوم صحیح را جایگزین نمایند. همچنین به مؤلفان کتاب‌های درسی نیز توصیه می‌شود که پاسخ‌های متفاوت دانش‌آموزان را در کتاب‌های درسی مطرح کنند. فوجی و ایتاکا[۳۱] در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی ژاپن از چنین رویکردی بهره برده‌اند[۳۲]. معلمان باید دانش‌آموزان را ترغیب نمایند تا پاسخ‌های خود را توجیه کنند و دلایل و توجیه‌های آنان را در کلاس‌های درس خود به بحث بگذارند. چرا که این دلایل و توجیه‌ها از یک سو نشان‌دهنده درک دانش‌آموزان از کسرها است و از سوی دیگر می‌تواند بدفهمی‌ها و مشکلات آن‌ها را در درک این مفهوم نشان دهد. همچنین، با توجه به متمایز بودن نحوه تفکر دانش‌آموزان و تفاوت‌های فردی آنان در حل مسائل به معلمان توصیه می‌شود که با مطرح کردن این راه‌حل‌های مختلف در کلاس‌های درس و بحث و گفت‌وگو پیرامون آن‌ها، این باور نادرست که برای هر مسئله تنها یک راه‌حل وجود دارد را در دانش‌آموزان شان اصلاح نمایند.

## پی نوشت

1- Wu
2- Behr, Lesh, Post & Silver
3- Limited contexts
4- Initial exposure
5- Half, unit fractions
6- Luneta & Makonye
7- Misconceptions
8- National Council of Teachers of Mathematics
9- Procedural fluency
10- Reasoning and argumentation
11- Proof
12- Kilpatric & swafford
13- Strategies
14- Subconstruct
15- part-whole, ratio, quotient, operator & measure
16- Kieren
17- Partitioning
18- Rate
19- Ozkan
20- heuristic
21- Proportionality
22- Integrative thread
23- To find fair shares
24- Density
25- Diagram or model-drawing
26- Visualize
27- Validity
28- Reliability
29- Kolmogorov-Smirnov, Mann-Whithney & Kruskal Wallis
30- Leung
31- Fujii & Iitaka

## مراجع


**[1]** Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. American Educator,25(2), 10 – 17.

**[2]** Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). 'Rational number concepts', in R. Lesh and M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, New York, pp. 91–125.

**[3]** Behr, M. J., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods. (pp. 201-248). Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*.

**[4]** Newstead, K. & Olivier, A. (1999). Addressing students' conceptions of common fractions. *Proceedings of the 23nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, 329 - 336). Haifa, Israel.

**[5]** Haser, Ç., Ubuz, B. (2003). Student's conception of fractions: a study of 5th grade students. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 24 : 64-69.

**[6]** Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructionaln strategies for teachers, 2nd edition.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

**[7]** Luneta, K. and Makonye, P. J. (2010).Learners errors and misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocenia, 3,* 36-45.*Mathematics Education, 31*, 89-113.*Mathematics,* 12, 318-326.

**[8]** Alamolhodaei, S. H. (1388). Principles of Mathematics Education. The first edition, Ferdowsi University of Mashhad.

**[9]** National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

**[10]** Reyhani, E. Hamidi, F. Kolahdouz, F. (1391). A Study on Mathematics Reasoning and Proof Conception of High School Second Graders**.** Journal of Curriculum Studies, 24, 157-182.

**[11]** Kilpatric, J. & Swafford, J. (1389). Helping children learn mathematics (Gooya, Z. and Behzad, M., Translator). The second edition, Tehran: Cultural Institute of the Fatemy.

**[12]** Nicolaou, A. A,. & Pitta-Pantazi, D. (2011). A New Theoretical Model for Understanding Fractions at The Elementary School.

**[13]** Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers, in R. Lesh (ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC*, Columbus, OH, pp. 101–144.

**[14]** Stewart, V. M. (2005). Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real world representations. PhD thesis, Florida State University.

**[15]** Ozkan, E. & Ozkan, A. (2012). Misconception in exponential numbers in IST and IIND level primary school mathematics. *Social and Behavioral Sciences,* 65 – 69.

**[16]** Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14,* 508–518.

**[17]** Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study student's understanding of fractions. *Educational studies in Mathematics, springer*.

**[18]** Norozi, F., Bakhshalizade, Sh. & Ghorbani Sisakht, Z. (1389). Multiple representations: the Important process of teaching and learning fractions. Journal of Education Technology, 5, 1, 13-23.

**[19]** Mathematics Navigator (2006): America's choice. A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2–8), *https://knowledgebase.pearsonschool.com, last date of access: Dec. 19 2013.*

**[20]** Ashlock, R. B. (2006). *Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction (*9th ed*).* Upper Saddle River, New Jersey: Merrill.

**[21]** Petit, Marjorie M., Laird, Robert E. & Marsden. Edwin L. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge.

**[22]** Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference*, (2), 49-56, Melbourne: University of Melbourne.

**[23]** Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol. 2, Bergen University College, Bergen, pp. 95–102.

**[24]** George, P. (1386). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (Aram, A., Translator). The eighth edition, Tehran: Keyhan.

**[25]** Reyhani, E. & kolahdouz, F. (1392). A Study and analyze the basic models of reasoning and proof in mathematics education. Journal of Educational Innovations, 48, 45-70.

**[26]** Ruzdar, A. (1385). What we need to know about the problem Solving. Journal of Mathematics Education Roshd, 86, 23-39.

**[27]** Tobias, J. M. (2009). Preservice elementary teachers' developing of rational numbr understanding through the social perspective and the relationship among social and individual environments. PhD thesis, University of Central Florida.

**[28]** Cai, J. , Fong Ng, S. & Moyer, J. C. (2011). Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore, In J. Cai, E. Knuth (eds), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education.* (pp 25-41). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

**[29]** Pantziara, M., & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educ Stud Math*.

**[30]** Leung, C. K. (2009). A preliminary study on Hong Kong students' understanding of fraction. *Paper presented at the 3rd Redesigning Pedagogy International Conference*, June, Singapore.

**[31]** Doosti, M. (1392). A Study on Sixth Grade Students' understanding of Fractions. Master's thesis, University of Shahid Rajaee Teacher Training.

**[32]** Fujii, T., Iitaka, SH. (2012). *Mathematics International Grade 1-6.* Tokyo, japan: Tokyo Shoseki Co., Ltd.